

Arkusz przykładowy, poziom rozszerzony (A1)

Zadanie 4.

Okrąg o_1 ma równanie $x^2 + (y-1)^2 = 25$, a okrąg o_2 ma równanie $(x-1)^2 + y^2 = 9$. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

- A. Te okręgi przecinają się w dwóch punktach.
- B. Te okręgi są styczne.
- C. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_1 leży w całości wewnątrz okręgu o_2 .
- D. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_2 leży w całości wewnątrz okręgu o_1 .

=====

Aby zbadać wzajemne położenie dwóch okręgów, możemy obliczyć odległość pomiędzy ich środkami, a następnie porównać tę odległość z sumą oraz różnicą ich promieni. Rozważmy dwa okręgi o środkach S_1, S_2 i promieniach odpowiednio R i r , gdzie $R > r$.

Jeżeli odległość pomiędzy środkami jest większa od sumy promieni $|S_1S_2| > R + r$, to okręgi są wzajemnie zewnętrzne, więc nie mają punktów wspólnych.

Jeżeli odległość pomiędzy środkami jest równa sumie promieni $|S_1S_2| = R + r$, to okręgi są styczne zewnętrznie, więc mają dokładnie jeden punkt wspólny.

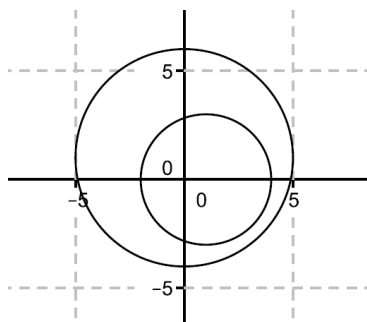
Jeżeli odległość pomiędzy środkami jest mniejsza od sumy promieni i jednocześnie większa od różnicy większego i mniejszego promienia $R - r < |S_1S_2| < R + r$, to okręgi przecinają się w dwóch punktach.

Jeżeli odległość pomiędzy środkami jest równa różnicy pomiędzy większym i mniejszym promieniem, $|S_1S_2| = R - r$, to okręgi są styczne wewnętrznie, więc mają dokładnie jeden punkt wspólny.

Jeżeli odległość pomiędzy środkami jest mniejsza od różnicy pomiędzy większym i mniejszym promieniem, czyli $|S_1S_2| < R - r$, to okrąg o mniejszym promieniu leży wewnątrz okręgu o większym promieniu (okręgi takie nie mają punktów wspólnych).

Przejdźmy teraz do rozwiązania Zadania 4.

W zadaniu tym współrzędne środków okręgów i ich promienie są tak dobrane, że wykonanie w miarę starannego rysunku, pozwala nam odpowiedzieć na pytanie o wzajemne położenie okręgów o_1 i o_2 . Oczywiście należy najpierw poprawnie odczytać z równań tych okręgów współrzędne środków – odpowiednio $S_1 = (0,1)$, $S_2 = (1,0)$ i promienie tych okręgów $R = 5$ oraz $r = 3$.



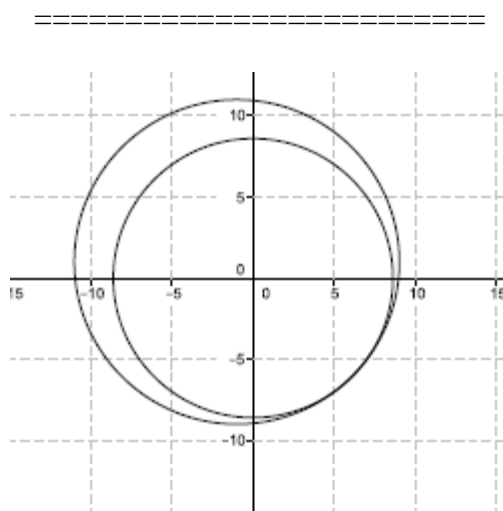
Dobrze sporządzony rysunek nie pozostawia wątpliwości, że poprawną odpowiedzią jest D. Oczywiście przedstawiona metoda nie będzie skuteczna wtedy, gdy na sporządzonym rysunku okręgi będą leżały na tyle blisko siebie, że nie będziemy w stanie stwierdzić, czy są styczne, czy też nie.

Poniżej dwa przykłady takich zadań.

Zadanie 4a.

Okrąg o_1 ma równanie $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 100$, a okrąg o_2 ma równanie $x^2 + y^2 = 74$. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

- A. Te okręgi przecinają się w dwóch punktach.
- B. Te okręgi są styczne.
- C. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_1 leży w całości wewnątrz okręgu o_2 .
- D. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_2 leży w całości wewnątrz okręgu o_1 .



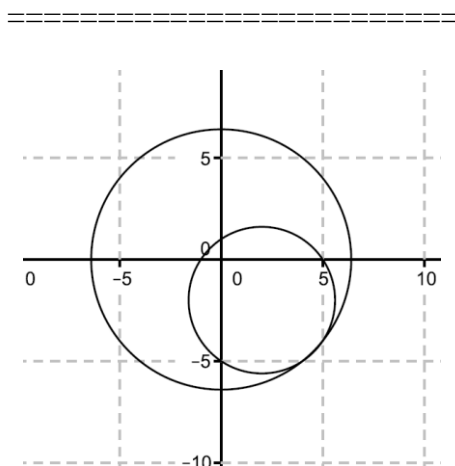
W tym zadaniu $S_1 = (-1, 1)$, $S_2 = (0, 0)$ i promienie tych okręgów $R = 10$ oraz $r = \sqrt{74}$. Odległość pomiędzy środkami tych okręgów jest równa $|S_1 S_2| = \sqrt{2}$.

Można sprawdzić, że $10 - \sqrt{74} < \sqrt{2} < 10 + \sqrt{74}$, czyli $R - r < |S_1 S_2| < R + r$. Zatem okręgi te przecinają się w dwóch punktach. Poprawną odpowiedzią jest A.

Zadanie 4b.

Okrąg o_1 ma równanie $x^2 + y^2 = 41$, a okrąg o_2 ma równanie $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 13$. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

- A. Te okręgi przecinają się w dwóch punktach.
- B. Te okręgi są styczne.
- C. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_1 leży w całości wewnątrz okręgu o_2 .
- D. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_2 leży w całości wewnątrz okręgu o_1 .



W tym zadaniu $S_1 = (0,0)$, $S_2 = (2,-2)$ i promienie tych okręgów $R = \sqrt{41}$ oraz $r = \sqrt{13}$.

Odległość pomiędzy środkami tych okręgów jest równa $|S_1S_2| = \sqrt{8}$.

Można sprawdzić, że $\sqrt{41} - \sqrt{13} < \sqrt{8} < \sqrt{41} + \sqrt{13}$, czyli $R - r < |S_1S_2| < R + r$. Zatem okręgi te przecinają się w dwóch punktach. Zatem odpowiedzią poprawną jest A.

Jak widzimy, metoda odwoływania się do rysunku nie zawsze jest skuteczna. W dwóch ostatnich zadaniach na tej podstawie nie możemy jednoznacznie odpowiedzieć na pytanie, czy okręgi te mają punkty wspólne. Rysunek sugeruje raczej, że okręgi te są styczne wewnętrznie, ale zapewne to tylko grubość linii sprawia takie wrażenie.

W takich sytuacjach lepiej nie odwoływać się do rysunku. W Zadaniu 4 obliczamy odległość między środkami tych okręgów $|S_1S_2| = \sqrt{8}$ i stwierdzamy, że ona mniejsza od różnicy promieni $R - r = 2$. To oznacza, że te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_2 leży w całości wewnątrz okręgu o_1 , a więc poprawną odpowiedzią jest D.

Zadanie 4 możemy rozwiązać jeszcze inaczej. Rozwiązując układ równań sprawdzamy, czy te okręgi mają punkty wspólne.

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 25 \\ (x-1)^2 + y^2 = 9 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y + 1 = 25 \\ x^2 + y^2 - 2x + 1 = 9 \end{cases}.$$

Odejmując te równania stronami otrzymujemy $2x - 2y = 16$, czyli $y = x - 8$.

Stąd i z drugiego z równań ostatniego z układów mamy

$$x^2 + (x - 8)^2 - 2x + 1 = 9,$$

$$2x^2 - 18x + 56 = 0,$$

$$x^2 - 9x + 28 = 0.$$

Wyróżnik tego równania jest ujemny, więc równanie i tym samym układ równań nie mają rozwiązań.

To oznacza, że należy odrzucić odpowiedzi A i B. Zatem jedna z dwóch pozostałych odpowiedzi musi być poprawna. Nie może to być odpowiedź C, gdyż okrąg o większym promieniu nie może leżeć w całości wewnątrz okręgu o mniejszym promieniu. Pozostała nam więc tylko odpowiedź D.

Oczywiście ta strategia rozwiązania nie byłaby do końca dobra, gdyby zamiast odpowiedzi C i D było podane raz, że okręgi te są rozłączne zewnętrznie, a raz, że rozłączne wewnętrznie. Wówczas z faktu, że układ równań nie ma rozwiązań moglibyśmy jedynie wyeliminować odpowiedzi A i B. Nie moglibyśmy jednak stwierdzić, która z dwóch pozostałych odpowiedzi jest poprawna. Przykład:

Zadanie 4c.

Okrąg o_1 ma równanie $x^2 + (y - 1)^2 = 25$, a okrąg o_2 ma równanie $(x - 1)^2 + y^2 = 9$. Określ wzajemne położenie tych okręgów.

- A. Te okręgi przecinają się w dwóch punktach.
- B. Te okręgi są styczne.
- C. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_2 leży w całości wewnątrz okręgu o_1 .
- D. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_2 leży w całości na zewnątrz okręgu o_1 .