Leszek Sochański

Arkusz przykładowy, poziom podstawowy (A1)

Zadanie 13.

Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola o wierzchołku $W=(5,7)$.
Wówczas prawdziwa jest równość

A. $f(1)=f(9)$ B. $f(1)=f(11)$ C. $f(1)=f(13)$ D. $f(1)=f(15)$

========================

Najbardziej naturalnym, choć, jak się okaże, niepraktycznym sposobem rozwiązania tego zadania, jest zapisanie funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Załóżmy, że uczeń wie, że jeśli wierzchołkiem paraboli jest punkt o współrzędnych (p,q), to parabola ma wzór $f(x)=a(x-p)^2+q$.

Zapisujemy naszą funkcję kwadratową w postaci kanonicznej: $f(x)=a(x-5)^2+7$, gdzie $a\neq 0$.

Zauważamy, że należy porównać dwie wartości funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola o podanym wierzchołku $W=(5,7)$.

Następnie obliczamy wartości tej funkcji dla podanych argumentów:

$f(1)=a(1-5)^2+7=16a+7$, $f(9)=a(9-5)^2+7=16a+7$, gdzie $a\neq 0$.

Otrzymujemy równość $f(1)=f(9)$, więc wybieramy wariant A.

Szczęśliwie, wariant A odpowiedzi jest poprawny. Gdyby tak nie było, np. gdyby poprawny był wariant D, to musielibyśmy obliczyć 5 wartości funkcji: $f(1)$, $f(9)$, $f(11)$, $f(13)$, $f(15)$. To pokazuje, że w przypadku ogólnym ta metoda nie jest najszybsza.

Jednak, ze wzoru na postać kanoniczną funkcji kwadratowej łatwo wynika, że parabola ma oś symetrii przechodzącą przez wierzchołek paraboli. Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli jest średnią arytmetyczną argumentów, dla których funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość. Tę własność uczeń powinien znać i wtedy rozwiązanie jest bardzo łatwe.

Wystarczy sprawdzić, w którym z przedziałów: $(1,9)$, $(1,11)$, $(1,13)$, $(1,15)$ środek ma pierwszą współrzędną równą 5. Ze wzoru na współrzędne środka odcinka obliczamy pierwszą współrzędną i otrzymujemy $x=\frac{1+9}{2}=5$. Większość zdających jest w stanie wykonać powyższy rachunek w pamięci.

Częstym błędem w obliczaniu współrzędnych środka odcinka jest obliczenie połowy różnicy zamiast średniej arytmetycznej współrzędnych jego końców. Często też uczniowie mylą argumenty z wartościami funkcji (przyrównanie średniej arytmetycznej argumentów do drugiej współrzędnej wierzchołka paraboli). Błędną odpowiedź mogą też wybrać ci, którzy nie rozumieją pojęcia symetrii osiowej lub próbują odczytać równość wartości funkcji na podstawie niedbale narysowanej krzywej.
Podczas omawiania z uczniami rozwiązania tego zadania, warto wspomnieć o tym, że druga współrzędna wierzchołka paraboli nie ma wpływu na wybór poprawnej odpowiedzi.

Praktyka szkolna pokazuje, że większość zdających rozwiąże to zadanie metodami obliczeniowymi. Poniżej podajemy dwa sposoby obliczeniowe, często stosowane przez uczniów.

I sposób

Zapisujemy wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$.

Wykorzystujemy wzór na pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $p=\frac{-b}{2a}=5$.

Otrzymujemy $b=-10a$, podstawiamy i otrzymujemy wzór $f(x)=ax^2-10ax+c$.

Obliczamy wartości funkcji dla wskazanych w zadaniu argumentów:

$f(1)=a-10a+c=-9a+c$, $f(9)=81a-90a+c=-9a+c$, gdzie $a\neq 0$.

Otrzymujemy równość $f(1)=f(9)$, więc wybieramy wariant A.

Zapewne część zdających wykonując zadanie tym sposobem utrudni sobie pracę, starając się zapisać wzór funkcji z wykorzystaniem jednego parametru. Takie rozumowanie przedstawiamy poniżej.

II sposób

Zapisujemy wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej $f(x)=ax^2+bx+c$, gdzie $a\neq 0$.

Wykorzystujemy wzór na pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli $p=\frac{-b}{2a}=5$ i obliczamy $b=-10a$.

Następnie wykorzystujemy fakt, że punkt leży na krzywej, gdy jego współrzędne spełniają równanie tej krzywej, tzn. $7=25a-5b+c$. Teraz tworzymy układ równań, z którego wyznaczamy b i c w zależności od a:

$$\begin{cases}25a-5b+c=7\\ b=-10a\end{cases}$$

$$\begin{cases}c=7-75a\\ b=-10a\end{cases}$$

Podstawiamy b i c do postaci ogólnej funkcji kwadratowej i otrzymujemy wzór $f(x)=ax^2-10ax+7-75a$

Obliczamy wartości funkcji dla wskazanych w zadaniu argumentów:

$f(1)=a-10a+7-75a=-84a+7$

$f(9)=81a-90a+7-75a=-84a+7$.

Otrzymujemy równość $f(1)=f(9)$, więc wybieramy wariant A.

Przy okazji prezentacji tego sposobu można wspomnieć, że do takich samych zapisów powinniśmy dojść zamieniając warunek $\frac{-b}{2a}=5$ na $\frac{-\Delta}{4a}=7$, jednak rachunki znacznie się utrudnią z powodu zapisu wyróżnika $\Delta=b^2-4ac$, zatem ta metoda nie jest wskazana. Przy okazji zapisywania równań, które wykorzystują współrzędne punktu *W*, uczniowie zapewne zauważą, że do rozwiązania zadania nie wystarczy samo położenie punktu na wykresie, czyli równanie $25a-5b+c=7$. Konieczne jest wykorzystanie informacji, że to jest wierzchołek paraboli, a nie dowolny punkt krzywej.

Słabsi uczniowie mogą uważać, że przedstawione zadanie jest zbyt abstrakcyjne. Należy wskazać równość wartości funkcji, a przecież nie podano jej wzoru! Gdzie wstawić zapisane argumenty?

Niektórzy uczniowie będą mieć inny problem, dostrzegą mianowicie, że parabol o podanym wierzchołku jest nieskończenie wiele, więc i funkcji f też, którą z nich więc wybrać i jak to zrobić?

Spróbujmy zaproponować im ciąg zadań naprowadzających na rozwiązanie zadania nr 13.

Zadanie 1. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x)=\frac{1}{2}x^2$. Zapisz współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji *f*, zapisz równanie osi symetrii tej paraboli i oblicz wartości funkcji *f* dla kilku argumentów będących liczbami przeciwnymi.

Rozwiązanie

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $W=(0,0)$, osią symetrii paraboli jest prosta o równaniu $x=0$, wartości funkcji dla liczb przeciwnych to np. $f(-4)=8=f(4)$, $f(-3)=\frac{9}{2}=f(3)$, $f(-2)=2=f(2)$.

Zadanie 2. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x)=ax^2, a\neq 0$. Zapisz współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji *f*, zapisz równanie osi symetrii tej paraboli i oblicz wartości funkcji *f* dla kilku argumentów będących liczbami przeciwnymi.

Rozwiązanie

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $W=(0,0)$, jej osią symetrii jest prosta o równaniu $x=0$, wartości funkcji dla liczb przeciwnych to np. $f(-4)=16a=f(4)$, $f(-3)=9a=f(3)$, $f(-2)=4a=f(2)$.

Zadanie 3. Wykres funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2$, $a\neq 0$ przesunięto o 5 jednostek w prawo wzdłuż osi *Ox* i otrzymano wykres funkcji *g*. Zapisz wzór funkcji *g*, współrzędne wierzchołka otrzymanej paraboli i podaj przykłady par takich argumentów, dla których wartości funkcji *g* są równe.

Rozwiązanie

Funkcja *g* opisana jest wzorem $g(x)=a(x-5)^2$, $a\neq 0$.Wierzchołkiem paraboli jest punkt $W_1=(5,0)$, równe wartości to np. $g(-4+5)=g(4+5)$, czyli $g(1)=g(9)$, albo $g(-3+5)=g(3+5)$, czyli $g(2)=g(8)$.

Po wykonaniu zadania 3 uczniowie zaobserwują, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli jest średnią arytmetyczną argumentów, dla których funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość tzn. $x_w=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

Zadanie 4. Parabolę o równaniu $g(x)=a(x-5)^2$, $a\neq 0$ przesunięto o 7 jednostek do góry wzdłuż osi *Oy* i otrzymano wykres funkcji *h*. Zapisz wzór funkcji *h* i współrzędne wierzchołka otrzymanej paraboli.

Rozwiązanie

Funkcja *h* opisana jest wzorem $h(x)=a(x-5)^2+7$, $a\neq 0$. Jej wykresem jest parabola o wierzchołku $W_2=(5,7)$.

Uczniowie powinni zauważyć, że to przesunięcie zmienia wartości funkcji, ale zachowuje ich równość dla argumentów takich, że $\dfrac{x_1+x_2}{2}=x_w$.

A co z uczniami, którzy już opanowali tę własność funkcji kwadratowej i rozwiązali bezbłędnie zadanie 13? Tym uczniom możemy zaproponować serię ćwiczeń wykorzystujących symetrię paraboli.

Zadanie 5. Uzasadnij, że jeśli x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej, to $\dfrac{x_1+x_2}{2}=x_w$.

Rozwiązanie

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{2a}=x_w$$

Zadanie 6. Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola o wierzchołku $W=(5,7)$. Jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba $1-\sqrt{2}$. Znajdź drugie miejsce zerowe tej funkcji.

Rozwiązanie

Wykorzystujemy udowodniony w zadaniu 5 wzór, wstawiając nasze dane $\frac{1-\sqrt{2}+x_2}{2}=5$, stąd otrzymujemy, że $x_2=9+\sqrt{2}$.

Zadanie 7. Dana jest parabola o równaniu $y=-\frac{1}{2}(x-5)^2+7$ i punkt $A=(3,5)$. Oblicz pole prostokąta *ABCD,* którego wierzchołki *A* i *B* leżą na tej paraboli, zaś wierzchołki *C* i *D* leżą na prostej o równaniu $y=2$.

Rozwiązanie

Zauważamy, że odcinek *AB* jest równoległy do osi *Ox.* Znajdujemy pierwszą współrzędną punktu *B* ze znanego już wzoru: $\frac{3+x_B}{2}=5$, stąd $B=(7,5)$. Punkt *C* leży pod punktem *B* na podanej prostej, więc $C=(7,2)$, analogicznie $D=(3,2)$. Pole prostokąta jest równe $P=4\cdot 3=12$.

Warto zwrócić uwagę na to, że istnieją inne (dłuższe) sposoby znalezienia pierwszej współrzędnej punktu *B.* Możemy np. ułożyć równanie $-\frac{1}{2}(x-5)^2+7=5$, czyli $(x-5)^2=4$, a stąd $x=3$ lub $x=7$. Jedna ze znalezionych liczb to pierwsza współrzędna znanego punktu *A,* druga jest współrzędną punktu *B.*

Zadanie 8. Dana jest parabola będąca wykresem funkcji $f(x)=-\frac{1}{2}(x-5)^2+8$ i punkt $A=(x,\ f(x))$, gdzie $x>5$. Rozpatrujemy wszystkie prostokąty *ABCD,* których wierzchołki *A* i *B* o dodatnich współrzędnych leżą na tej paraboli, zaś wierzchołki *C* i *D* leżą na osi *Ox.* Przedstaw pole prostokąta *ABCD* jako funkcję zmiennej pierwszej współrzędnej punktu *A* i wyznacz jej dziedzinę.

Rozwiązanie

Znajdujemy punkty przecięcia paraboli z osią Ox rozwiązując równanie $-\frac{1}{2}(x-5)^2+8=0$.

$(x-5)^2=16$

$x-5=4$ lub $x-5=-4$

$x=9$ lub $x=1$

Zatem dziedziną funkcji opisującej pole prostokąta jest przedział $(5, 9)$.

Punkt $A=\left(x,\ -\frac{1}{2}(x-5)^2+8\right)$, wyznaczamy pierwszą współrzędną punktu B: $\frac{x+x_B}{2}=5$, $B=\left(10-x,\ -\frac{1}{2}(x-5)^2+8\right)$ oraz pozostałych punktów: $C=(10-x,\ 0)$, $D=(x,\ 0)$.

Obliczamy długości boków prostokąta $|AB|=|10-x-x|=|10-2x|=2x-10$,

$|BC|=\left|-\frac{1}{2}(x-5)^2+8-0\right|=-\frac{1}{2}(x-5)^2+8$.

Stosujemy wzór na pole prostokąta i otrzymujemy funkcję, która przedstawia zależność pola prostokąta od pierwszej współrzędnej punktu A: $P(x)=-(x-5)^3+16(x-5)$, gdzie $5<x<9$.

Kolejne zadanie (możliwe do zrealizowania tylko na etapie rozszerzonym) to polecenie wyznaczenia wierzchołków prostokąta *ABCD*, którego pole jest największe.

Zadanie 9. Dana jest parabola o równaniu $y=-x^2+10x-9$. Rozpatrujemy wszystkie prostokąty, których dwa sąsiednie wierzchołki o dodatnich współrzędnych leżą na tej paraboli, zaś dwa pozostałe wierzchołki leżą na osi Ox. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego z prostokątów o podanej własności, który ma największe pole. Oblicz to pole.

Rozwiązanie

Parabola jest wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=-x^2+10x-9$. Wyznaczamy punkty przecięcia paraboli z osią Ox oraz pierwszą współrzędną jej wierzchołka:

$-x^2+10x-9=0$

$-x^2+x+9x-9=0$

$-x(x-1)+9(x-1)=0$

$-(x-1)(x-9)=0$ stąd otrzymujemy $x_1=1$, $x_2=9$, $x_w=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+9}{2}=5$,

Przyjmujemy, że jednym z wierzchołków prostokąta jest punkt $A=(x,\ -x^2+10x-9)$, gdzie $5<x<9$. Wtedy pozostałe wierzchołki prostokąta to: $B=(10-x,\ -x^2+10x-9)$, $C=(10-x,\ 0)$ i $D=(x,\ 0)$.

Obliczamy długości boków prostokąta:

$|AB| = |10-2x| = 2x-10$, $|CB| = \left|-x^2+10x-9-0\right| = -x^2+10x-9$
oraz pole $P(x) = (2x-10)\left(-x^2+10x-9\right)$.

Zapisujemy pole prostokąta w postaci $P(x) = -2x^3+30x^2-118x+90$, $5<x<9$. W celu wyznaczenia największej wartości funkcji stosujemy rachunek pochodnych.

Obliczamy pochodną funkcji P: $P'(x) = -6x^2+60x-118$.

$P'(x)=0$ dla $x=5-\frac{4}{3}\sqrt{3}$ lub $x=5+\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Uwzględniając podany przedział wybieramy $x=5+\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

$P'(x)>0$ dla $5<x<5+\frac{4}{3}\sqrt{3}$ oraz $P'(x)<0$ dla $5+\frac{4}{3}\sqrt{3}<x<9$.

Z analizy znaków pochodnej w dziedzinie funkcji wynika, że dla $x=5+\frac{4}{3}\sqrt{3}$ funkcja pola przyjmuje maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą wartością tej funkcji.

Wyznaczamy współrzędne wierzchołków prostokąta o największym polu:

$$f\left(5+\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) = -\left(5+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 + 10\left(5+\frac{4}{\sqrt{3}}\right) - 9 = \frac{32}{3},$$

zatem

$$A=\left(5+\frac{4}{3}\sqrt{3},\ \frac{32}{3}\right),\ B=\left(5-\frac{4}{3}\sqrt{3},\ \frac{32}{3}\right),\ C=\left(5-\frac{4}{3}\sqrt{3},\ 0\right),\ D=\left(5+\frac{4}{3}\sqrt{3},\ 0\right).$$

Pole prostokąta jest równe $P=\frac{8}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{32}{3}=\frac{256}{9}\sqrt{3}$.