Próbna matura rozszerzona (jesień 2014 r.)

Zadanie 16 — kilka innych rozwiązań

Wojciech Guzicki

Zadanie 16. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną „jedynkę” pod warunkiem, że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę”.

Rozwiązanie. Sposób I. Niech przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω będzie zbiorem wszystkich ciągów (a,b,c) długości 3 takich, że $a,b,c \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Z reguły mnożenia wynika, że $|\Omega| = 6\cdot 6\cdot 6 = 216$. W tej przestrzeni rozważamy następujące dwa zdarzenia:

$A:$ zdarzenie polegające na tym, że w ciągu (a,b,c) co najmniej jeden wyraz jest jedynką (tzn. $a=1$ lub $b=1$ lub $c=1$),

$B:$ zdarzenie polegające na tym, że w ciągu (a,b,c) co najmniej jeden wyraz jest szóstką (tzn. $a=6$ lub $b=6$ lub $c=6$).

Naszym zadaniem jest obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(A\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Ponieważ

$$P(A\cap B) = \frac{|A\cap B|}{|\Omega|} \quad \text{oraz} \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|},$$

więc

$$P(A\mid B) = \frac{|A\cap B|}{|B|}.$$

Nasze zadanie sprowadza się więc do obliczenia $|A\cap B|$ oraz $|B|$. Najpierw obliczymy $|B|$. Omówię siedem sposobów obliczenia liczby ciągów (a,b,c), w których co najmniej jeden wyraz jest szóstką. W trzech pierwszych sposobach podzielimy zbiór B na trzy podzbiory parami rozłączne, stosując różne kryteria podziału. Następnie obliczymy liczbę ciągów w każdym z tych podzbiorów (za pomocą reguły mnożenia) i otrzymane liczby dodamy (a więc zastosujemy regułę dodawania). A oto te trzy pierwsze sposoby.

Sposób 1. (Liczba szóstek) Zbiór B podzielimy na trzy podzbiory parami rozłączne:

$B_1:$ zbiór ciągów (a,b,c), w których występuje dokładnie jedna szóstka,
$B_2:$ zbiór ciągów (a,b,c), w których występują dokładnie dwie szóstki,
$B_3:$ zbiór ciągów (a,b,c), w których występują trzy szóstki.

Zbiór B_1 ma 75 elementów: najpierw wybieramy miejsce dla szóstki (mamy 3 możliwości), a następnie w każde z dwóch pozostałych wolnych miejsc wstawiamy jeden element zbioru $\{1,2,3,4,5\}$ (mamy $5\cdot 5 = 25$ możliwości); z reguły mnożenia wynika, że $|B_1| = 3\cdot 25 = 75$. Zbiór B_2 ma 15 elementów: najpierw wybieramy miejsce dla liczby różnej od szóstki (mamy 3 możliwości), a następnie wybieramy tę liczbę (mamy

5 możliwości); z reguły mnożenia wynika, że $|B_2| = 3 \cdot 5 = 15$. Wreszcie zbiór B_3 ma jeden element: jest nim ciąg $(6, 6, 6)$. Ostatecznie

$$|B| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = 75 + 15 + 1 = 91.$$

Sposób 2. (Pierwsza szóstka) Zbiór B podzielimy na trzy podzbiory parami rozłączne:

B_1 : zbiór ciągów (a, b, c), w których pierwsza szóstka występuje na pierwszym miejscu (tzn. $a = 6$),

B_2 : zbiór ciągów (a, b, c), w których pierwsza szóstka występuje na drugim miejscu (tzn. $a \neq 6$ oraz $b = 6$),

B_3 : zbiór ciągów (a, b, c), w których pierwsza szóstka występuje na trzecim miejscu (tzn. $a \neq 6$, $b \neq 6$ oraz $c = 6$).

Zbiór B_1 ma 36 elementów: na pierwszym miejscu wstawiamy szóstkę i na każdym z dwóch pozostałych dowolną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (mamy $6 \cdot 6 = 36$ możliwości). Zbiór B_2 ma 30 elementów: na pierwszym miejscu wstawiamy liczbę różną od szóstki (mamy 5 możliwości) i na ostatnim dowolną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (mamy 6 możliwości); z reguły mnożenia wynika, że $|B_2| = 5 \cdot 6 = 30$. Wreszcie zbiór B_3 ma 25 elementów: na pierwszych dwóch miejscach wstawiamy liczby różne od szóstki (mamy $5 \cdot 5 = 25$ możliwości). Ostatecznie

$$|B| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = 36 + 30 + 25 = 91.$$

Sposób 3. (Ostatnia szóstka) Zbiór B podzielimy na trzy podzbiory parami rozłączne:

B_1 : zbiór ciągów (a, b, c), w których ostatnia szóstka występuje na pierwszym miejscu (tzn. $a = 6$, $b \neq 6$ oraz $c \neq 6$),

B_2 : zbiór ciągów (a, b, c), w których ostatnia szóstka występuje na drugim miejscu (tzn. $b = 6$ oraz $c \neq 6$),

B_3 : zbiór ciągów (a, b, c), w których ostatnia szóstka występuje na trzecim miejscu (tzn. $c = 6$).

Zbiór B_1 ma 25 elementów: na pierwszym miejscu wstawiamy szóstkę i na każdym z dwóch pozostałych dowolną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (mamy $5 \cdot 5 = 25$ możliwości). Zbiór B_2 ma 30 elementów: na pierwszym miejscu wstawiamy dowolną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (mamy 6 możliwości) i na ostatnim dowolną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (mamy 5 możliwości); z reguły mnożenia wynika, że $|B_2| = 6 \cdot 5 = 30$. Wreszcie zbiór B_3 ma 36 elementów: na pierwszych dwóch miejscach wstawiamy dowolne liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (mamy $6 \cdot 6 = 36$ możliwości). Ostatecznie

$$|B| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = 25 + 30 + 36 = 91.$$

Następne trzy sposoby wykorzystują inne pomysły kombinatoryczne.

Sposób 4. (Uzupełnianie) Rozważamy zbiór B'. Składa się on z ciągów (a, b, c), w których nie występuje szóstka. Z reguły mnożenia wynika, że ma on $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ elementów (na każdym z trzech miejsc wstawiamy jedną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, a więc na każdym miejscu mamy 5 możliwości). Stąd wynika, że

$$|B| = |\Omega| - |B'| = 216 - 125 = 91.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA · IBE entuzjaści edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Sposób 5. (Zasada włączeń i wyłączeń) Definiujemy trzy zbiory:

B_1 : zbiór ciągów (a, b, c), w których $a = 6$,
B_2 : zbiór ciągów (a, b, c), w których $b = 6$,
B_3 : zbiór ciągów (a, b, c), w których $c = 6$.

Z reguły włączeń i wyłączeń wynika, że

$$|B| = |B_1| + |B_2| + |B_3| - |B_1 \cap B_2| - |B_1 \cap B_3| - |B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3|.$$

Teraz nietrudno z reguły mnożenia wyprowadzić następujące równości:

$$|B_1| = |B_2| = |B_3| = 36 \quad \text{oraz} \quad |B_1 \cap B_2| = |B_1 \cap B_3| = |B_2 \cap B_3| = 6.$$

Wreszcie $|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = 1$. Zatem

$$|B| = 36 + 36 + 36 - 6 - 6 - 6 + 1 = 91.$$

Sposób 6. (Poprawiony sposób błędny) Uczniowie często rozumują w następujący sposób: najpierw wybieramy miejsce dla szóstki (mamy 3 możliwości), a następnie w każde z pozostałych dwóch miejsc wstawiamy dowolną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (mamy $6 \cdot 6 = 36$ możliwości. Z reguły mnożenia wynika wtedy, że $|B| = 3 \cdot 36 = 108$. Błąd w tym rozumowaniu polega na tym, że ciągi z dwiema szóstkami są liczone dwukrotnie, a ciąg z trzema szóstkami nawet trzykrotnie. Na przykład ciąg $(6, 2, 6)$ został raz policzony jako ciąg, w którym najpierw na pierwszym miejscu wstawiliśmy szóstkę, a następnie na dwóch pozostałych miejscach (tzn. drugim i trzecim) liczby 2 i 6. Drugi raz został policzony jako ciąg, w którym najpierw na trzecim miejscu wstawiliśmy szóstkę, a następnie na dwóch pozostałych miejscach (tzn. pierwszym i drugim) liczby 6 i 2.

Ten błąd można poprawić, odejmując od otrzymanej liczby 108 liczbę ciągów z dwiema szóstkami oraz podwojoną liczbę ciągów z trzema szóstkami. Otrzymamy wtedy

$$|B| = 108 - 15 - 2 \cdot 1 = 108 - 17 = 91.$$

Wreszcie sposób 7 polega na wypisaniu wszystkich możliwych ciągów. Należy tu zauważyć, że kolejność wypisywania ciągów może odpowiadać pierwszym trzem sposobom rozwiązania. Na przykład możemy najpierw wypisać wszystkie ciągi z jedną szóstką, potem wszystkie ciągi z dwiema szóstkami i wreszcie ciąg z trzema szóstkami — ta kolejność wypisywania odpowiada sposobowi I rozwiązania.

Podsumujmy: otrzymaliśmy równość $|B| = 91$.

Teraz obliczymy $|A \cap B|$. Tym razem pokażę jeden sposób obliczenia. Zbiór $A \cap B$ podzielimy na trzy parami rozłączne podzbiory:

- P: zbiór ciągów, w których występuje dokładnie jedna jedynka i dokładnie jedna szóstka,
- Q: zbiór ciągów, w których występuje dokładnie jedna jedynka i dokładnie dwie szóstki,
- R: zbiór ciągów, w których występuje dokładnie jedna szóstka i dokładnie dwie jedynki.

Zbiór P ma 24 elementy: najpierw wybieramy miejsce dla jedynki (mamy 3 możliwości), potem miejsce dla szóstki (mamy 2 możliwości) i na końcu w ostatnie wolne miejsce wstawiamy jedną liczbę ze zbioru $\{2,3,4,5\}$ (mamy cztery możliwości); wreszcie z reguły mnożenia wynika, że $|P| = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$. Zbiór Q ma 3 elementy: wybieramy miejsce dla jedynki (mamy 3 możliwości) i w pozostałe wolne miejsca wstawiamy szóstki. W podobny sposób pokazujemy, że zbiór R też ma 3 elementy. Zatem

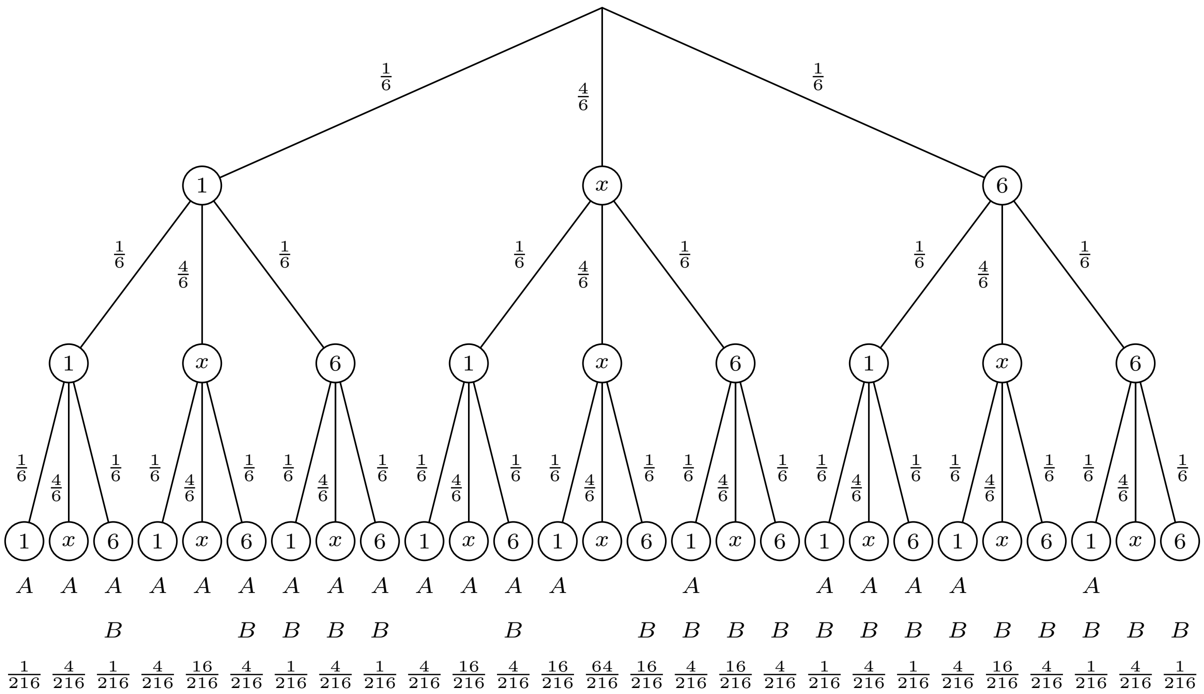
$$|A \cap B| = |P| + |Q| + |R| = 24 + 3 + 3 = 30.$$

Wreszcie

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{30}{91}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Rozwiązanie. Sposób II. Szukane prawdopodobieństwa $P(B)$ i $P(A \cap B)$ można obliczyć za pomocą odpowiednio narysowanego drzewa:



(litera x oznacza liczbę oczek różną od 1 i od 6). Sumując prawdopodobieństwa pod gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu B, otrzymujemy $P(B) = \frac{91}{216}$. Sumując następnie prawdopodobieństwa pod gałęziami odpowiadającymi obu zdarzeniom A i B, otrzymujemy $P(A \cap B) = \frac{30}{216}$. Zatem

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{30}{91}.$$

Popatrzmy na kilka uogólnień tego zadania.

Zadanie 16a. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że jeśli rzucimy n razy symetryczną sześcienną kostką do gry, to otrzymamy co najmniej jedną „jedynkę” pod warunkiem, że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę”.

Rozwiązanie. Niech przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω będzie zbiorem wszystkich ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$ długości n takich, że $a_1, \ldots, a_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Z reguły mnożenia wynika, że $|\Omega| = 6^n$. W tej przestrzeni rozważamy następujące dwa zdarzenia:

$A:$ zdarzenie polegające na tym, że w ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ co najmniej jeden wyraz jest jedynką (tzn. $a_i = 1$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$),

$B:$ zdarzenie polegające na tym, że w ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ co najmniej jeden wyraz jest szóstką (tzn. $a_i = 6$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$).

Tak jak poprzednio, naszym zadaniem jest obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Zadanie to sprowadza się znów do obliczenia $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Najpierw obliczymy $|B|$. Tym razem pokażę jeden sposób obliczenia $|B|$.

Zauważmy, że zbiór B' składa się z ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$, w których każdy wyraz należy do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Zatem z reguły mnożenia otrzymujemy

$$|B| = |\Omega| - |B'| = 6^n - 5^n.$$

W podobny sposób dostajemy

$$|A'| = 5^n \quad \text{oraz} \quad |A' \cap B'| = 4^n.$$

Następnie z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy

$$|A \cap B| = |\Omega| - |(A \cap B)'| = 6^n - |A' \cup B'| = 6^n - (|A'| + |B'| - |A' \cap B'|) = 6^n - 2 \cdot 5^n + 4^n.$$

Wreszcie

$$P(A \mid B) = \frac{6^n - 2 \cdot 5^n + 4^n}{6^n - 5^n} = 1 - \frac{5^n - 4^n}{6^n - 5^n}.$$

Dla $n = 3$ otrzymujemy:

$$P(A \mid B) = 1 - \frac{5^3 - 4^3}{6^3 - 5^3} = 1 - \frac{125 - 64}{216 - 125} = 1 - \frac{61}{91} = \frac{30}{91}.$$

Zadanie 16b. Mamy urnę zawierającą m kul ponumerowanych liczbami od 1 do m. Losujemy n razy (ze zwracaniem) kulę z tej urny. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że wylosujemy co najmniej jeden raz kulę z numerem ze zbioru $\{1, \ldots, k\}$ pod warunkiem, że wylosujemy co najmniej jeden raz kulę z numerem ze zbioru $\{m - l + 1, \ldots, m\}$.

Rozwiązanie. Niech przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω będzie zbiorem wszystkich ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$ długości n takich, że $a_1, \ldots, a_n \in \{1, \ldots, m\}$. Z reguły mnożenia wynika, że $|\Omega| = m^n$. W tej przestrzeni rozważamy następujące dwa zdarzenia:

A : zdarzenie polegające na tym, że w ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ co najmniej jeden wyraz należy do zbioru $\{1, \ldots, k\}$ (tzn. $a_i \leq k$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$),

B : zdarzenie polegające na tym, że w ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ co najmniej jeden wyraz należy do zbioru $\{m-l+1, \ldots, m\}$ (tzn. $a_i > m-l$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$).

Tak jak poprzednio, naszym zadaniem jest obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Zadanie to sprowadza się znów do obliczenia $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Najpierw obliczymy $|B|$. Zauważmy, że zbiór B' składa się z ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$, w których każdy wyraz należy do zbioru $\{1, \ldots, m-l\}$. Zatem z reguły mnożenia otrzymujemy

$$|B| = |\Omega| - |B'| = m^n - (m-l)^n.$$

W podobny sposób dostajemy

$$|A'| = (m-k)^n \quad \text{oraz} \quad |A' \cap B'| = (m-k-l)^n.$$

Następnie z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= |\Omega| - |(A \cap B)'| = m^n - |A' \cup B'| = m^n - (|A'| + |B'| - |A' \cap B'|) = \\ &= m^n - (m-k)^n - (m-l) + (m-k-l)^n. \end{aligned}$$

Wreszcie

$$P(A \mid B) = \frac{m^n - (m-k)^n - (m-l)^n + (m-k-l)^n}{m^n - (m-l)^n} = 1 - \frac{(m-k)^n - (m-k-l)^n}{m^n - (m-l)^n}.$$

Zadanie 16c. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że jeśli rzucimy 5 razy symetryczną sześcienną kostką do gry, to otrzymamy co najmniej dwie „jedynki” pod warunkiem, że otrzymamy co najmniej dwie „szóstki”.

Rozwiązanie. Niech przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω będzie zbiorem wszystkich ciągów $(a_1, \ldots, a_5)$ długości 5 takich, że $a_1, \ldots, a_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Z reguły mnożenia wynika, że $|\Omega| = 6^5$. W tej przestrzeni rozważamy następujące dwa zdarzenia:

A : zdarzenie polegające na tym, że w ciągu $(a_1, \ldots, a_5)$ co najmniej dwa wyrazy są jedynkami (tzn. $a_i = a_j = 1$ dla pewnych i, j takich, że $1 \leq i < j \leq 5$),

B : zdarzenie polegające na tym, że w ciągu $(a_1, \ldots, a_5)$ co najmniej dwa wyrazy są szóstkami (tzn. $a_i = a_j = 6$ dla pewnych i, j takich, że $1 \leq i < j \leq 5$).

Tak jak poprzednio, naszym zadaniem jest obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Zadanie to sprowadza się znów do obliczenia $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Najpierw obliczymy $|B|$. Tym razem pokażę jeden sposób obliczenia $|B|$.

Zauważmy, że zbiór B' składa się z ciągów $(a_1, \ldots, a_5)$, w których albo każdy wyraz należy do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, albo jeden wyraz jest szóstką i pozostałe należą do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Zatem korzystając z reguł dodawania i mnożenia otrzymujemy

$$|B| = |\Omega| - |B'| = 6^5 - (5^5 + 5 \cdot 5^4) = 6^5 - 10 \cdot 5^4 = 7776 - 6250 = 1526.$$

W podobny sposób dostajemy

$$|A'| = 10 \cdot 5^4.$$

Obliczenie $|A' \cap B'|$ jest trudniejsze. Do zbioru $A' \cap B'$ należą ciągi $(a_1, \ldots, a_7)$ takie, że:

- wszystkie wyrazy ciągu $(a_1, \ldots, a_5)$ są różne od 1 i od 6; istnieje 4^5 takich ciągów,
- wszystkie wyrazy ciągu $(a_1, \ldots, a_5)$ są różne od 1 i dokładnie jeden jest równy 6; istnieje $5 \cdot 4^4$ takich ciągów,
- wszystkie wyrazy ciągu $(a_1, \ldots, a_5)$ są różne od 6 i dokładnie jeden jest równy 1; istnieje $5 \cdot 4^4$ takich ciągów,
- dokładnie jeden wyraz ciągu $(a_1, \ldots, a_5)$ jest równy 1 i dokładnie jeden jest równy 6; istnieje $5 \cdot 4 \cdot 4^3$ takich ciągów.

Łącznie zatem mamy

$$|A' \cap B'| = 4^5 + 2 \cdot 5 \cdot 4^4 + 5 \cdot 4 \cdot 4^3 = (16 + 40 + 20) \cdot 4^3 = 76 \cdot 4^3.$$

Następnie z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= |\Omega| - |(A \cap B)'| = 6^5 - |A' \cup B'| = 6^5 - (|A'| + |B'| - |A' \cap B'|) = \\ &= 6^5 - 2 \cdot 10 \cdot 5^4 + 76 \cdot 4^3 = 7776 - 12500 + 4864 = 140. \end{aligned}$$

Wreszcie

$$P(A \mid B) = \frac{140}{1526} = \frac{10}{109} \approx 0{,}091743.$$

Zadanie 16d. Mamy urnę zawierającą m kul ponumerowanych liczbami od 1 do m. Losujemy n razy (ze zwracaniem) kulę z tej urny. Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe tego, że co najmniej dwa razy wylosujemy kulę z numerem 1 pod warunkiem, że co najmniej dwa razy wylosujemy kulę z numerem m.

Rozwiązanie. Niech przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω będzie zbiorem wszystkich ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$ długości n takich, że $a_1, \ldots, a_n \in \{1, \ldots, m\}$. Z reguły mnożenia wynika, że $|\Omega| = m^n$. W tej przestrzeni rozważamy następujące dwa zdarzenia:

$A:$ zdarzenie polegające na tym, że w ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ co najmniej dwa wyrazy są równe 1 (tzn. $a_i = a_j = 1$ dla pewnych i, j takich, że $1 \le i < j \le n$),

$B:$ zdarzenie polegające na tym, że w ciągu $(a_1, \ldots, a_7)$ co najmniej dwa wyrazy są równe m (tzn. $a_i = a_j = m$ dla pewnych i, j takich, że $1 \le i < j \le n$).

Tak jak poprzednio, naszym zadaniem jest obliczenie prawdopodobieństwa warunkowego

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Zadanie to sprowadza się znów do obliczenia $|A \cap B|$ oraz $|B|$. Najpierw obliczymy $|B|$. Zauważmy, że zbiór B' składa się z ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$, w których albo każdy wyraz należy do zbioru $\{1, \ldots, m-1\}$, albo jeden wyraz jest równy m i pozostałe należą do zbioru $\{1, \ldots, m-1\}$. Zatem korzystając z reguł dodawania i mnożenia otrzymujemy

$$|B| = |\Omega| - |B'| = m^n - \left((m-1)^n + n \cdot (m-1)^{n-1}\right) = m^n - (m+n-1) \cdot (m-1)^{n-1}.$$

W podobny sposób dostajemy

$$|A'| = (m+n-1) \cdot (m-1)^{n-1}.$$

Obliczenie $|A' \cap B'|$ jest trudniejsze. Do zbioru $A' \cap B'$ należą ciągi $(a_1, \ldots, a_n)$ takie, że:

- wszystkie wyrazy ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ są różne od 1 i od m; istnieje $(m-2)^n$ takich ciągów,
- wszystkie wyrazy ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ są różne od 1 i dokładnie jeden jest równy m; istnieje $n \cdot (m-2)^{n-1}$ takich ciągów,
- wszystkie wyrazy ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ są różne od m i dokładnie jeden jest równy 1; istnieje $n \cdot (m-2)^{n-1}$ takich ciągów,
- dokładnie jeden wyraz ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ jest równy 1 i dokładnie jeden jest równy m; istnieje $n \cdot (n-1) \cdot (m-2)^{n-2}$ takich ciągów.

Łącznie zatem mamy

$$\begin{aligned}
|A' \cap B'| &= (m-2)^n + 2 \cdot n \cdot (m-2)^{n-1} + n \cdot (n-1) \cdot (m-2)^{n-1} = \\
&= (m-2)^{n-2} \cdot \big((m-2)^2 + 2n(m-2) + n(n-1)\big) = \\
&= (m-2)^{n-2} \cdot \big(m^2 - 4m + 4 + 2mn - 4n + n^2 - n\big) = \\
&= (m-2)^{n-2} \cdot \big((m+n)^2 - 4(m+n) + 4 - n\big) = \\
&= (m-2)^{n-2} \cdot \big((m+n-2)^2 - n\big).
\end{aligned}$$

Następnie z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|A \cap B| &= |\Omega| - |(A \cap B)'| = m^n - |A' \cup B'| = m^n - (|A'| + |B'| - |A' \cap B'|) = \\
&= m^n - 2(m+n-1) \cdot (m-1)^{n-1} + \big((m+n-2)^2 - n\big) \cdot (m-2)^{n-2}.
\end{aligned}$$

Wreszcie

$$\begin{aligned}
P(A \mid B) &= \frac{m^n - 2(m+n-1) \cdot (m-1)^{n-1} + \big((m+n-2)^2 - n\big) \cdot (m-2)^{n-2}}{m^n - (m+n-1) \cdot (m-1)^{n-1}} = \\
&= 1 - \frac{(m+n-1) \cdot (m-1)^{n-1} - \big((m+n-2)^2 - n\big) \cdot (m-2)^{n-2}}{m^n - (m+n-1) \cdot (m-1)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy $m = 6$ i $n = 5$, to otrzymamy

$$\begin{aligned}
P(A \mid B) &= 1 - \frac{10 \cdot 5^4 - (9^2 - 5) \cdot 4^3}{6^5 - 10 \cdot 5^4} = 1 - \frac{6250 - 76 \cdot 64}{7776 - 6250} = 1 - \frac{6250 - 4864}{1526} = \\
&= 1 - \frac{1386}{1526} = 1 - \frac{14 \cdot 99}{14 \cdot 109} = 1 - \frac{99}{109} = \frac{10}{109}.
\end{aligned}$$